Переменные действие-угол помогают решать задачи на адиабатические инварианты.

Пусть у нас есть гармонические колебательные системы:
А) груз на пружинке
Б) груз на ниточке
В) LC-контур

И мы начинаем что-то в них медленно менять (а именно – менять какую-то величину, входящую в состав формулы для периода):
А) менять массу грузика на пружинке
Б) менять длину ниточки
В) менять ускорение свободного падения (ну, например, притащив нейтронную звезду с её огромной плотностью)
Г) крутить ручку реостата, меняя R

То колебания из гармонических превратятся в квазигармонические. Энергия, амплитуда и циклическая частота будут постепенно изменяться.

Строгое решение подобных задач довольно сложно, если не знать одно прекрасно:

Величина $E(t)/\omega(t)$ есть константа! И она называется действием. Обозначается как J.

Т.е. мы берём, например, LC-контур и начинаем медленно крутить ручку реостата. В зависимости от того, увеличиваем или уменьшаем ли мы частоту, энергия может как расти, так и уменьшаться. Частота может как расти, так и уменьшаться. А вот соотношение ***$E(t)/\omega(t)$*** будет константой.

Ну, не совсем, она будет меняться, но только лишь со вторым порядком малости, в то время как $E(t)$, $\omega(t)$, амлитуда(t) будут меняться с первым порядком.

Примеры!
1) Маятник на нитке, длина которого $l(t)$ медленно меняется.
Заметим, что установить зависимость $\omega(t)$ очень от времени очень просто, есть готовая формула:

$$\omega(t)=\sqrt{\frac{g}{l(t)}}$$

А вот как быть с $E(t)$? Как нам установить эту зависимость от времени? Вот и приходит на помощь

$$J = \frac{E(t)}{\omega(t)}$$

Получим зависимость энергии от времени:

$$E(t) = \frac{J\sqrt{g}}{\sqrt{\ell(t)}}$$

Теперь надо связать энергию с амплитудой и получим ответ.
Энергию удобно считать в крайних положениях, потому что там кин энергия нуль и надо подсчитать лишь потенциальную. Для математического маятника ($\varphi_a(t)$ – амплитудное значение)

$$E(t) = mg\,\frac{\ell(t)}{\varphi_a^2(t)}$$

Подставляем энергию через длину:

$$\frac{J\sqrt{g}}{\sqrt{\ell(t)}} = mg\,\frac{\ell(t)\varphi_a^2(t)}{2}$$

Коэффициент пропорциональности нас не интересует, интересуют лишь степени:

$$\ell(t)^{-3/2} \sim \varphi_a^2(t)$$

$$\ell(t)^{-3/4} \sim \varphi_a(t)$$

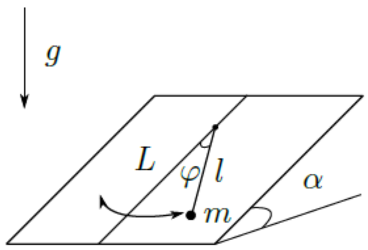
Можно это записать и так:

$$\boxed{\frac{A}{A_0} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^{-\frac{3}{4}}}$$

(Степаньянц обозначает φ_a за A).

Вот ещё одна задача. Сначала посмотрим, что пишет Степаньянц, а потом я дам свои комментарии.

Маятник на наклонной плоскости с меняющимся углом наклона



Пусть у нас есть наклонная плоскость, составляющая угол α с горизонтальной плоскостью. В этой плоскости колеблется маятник длиной l и массой m. Как меняется амплитуда маятника при медленном изменении угла α? Делаем как в прошлой задаче:

1) ФЛ (пренебрегая изменением α)

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - \underbrace{(L - l\cos\varphi)\sin\alpha}_{h}\, mg$$

2) квадратичное приближение ФЛ

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{mgl}{2}\varphi^2\sin\alpha$$

3) обобщенная энергия

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgl}{2}\varphi^2\sin\alpha$$

4) решение УЛ

$$\varphi = A\cos(\omega t + \beta_0)\,, \text{ где } \omega^2 = \frac{g}{l}\sin\alpha$$

5) связь энергии с амплитудой

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mgl}{2}\varphi^2\sin\alpha = \frac{mgl}{2}\sin\alpha\, A^2$$

6) рассматриваемая система — гармонический осциллятор, поэтому

$$\text{const} = J = \frac{E}{\omega} = \frac{mgl\sin\alpha\, A^2}{2\sqrt{\sin\alpha}}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

7) ответ

$$(\sin\alpha)^{\frac{1}{2}} A^2 = \text{const} \Rightarrow A \sim (\sin\alpha)^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{\frac{A}{A_0} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}\right)^{-\frac{1}{4}}}$$

Пункты (1)-(4) можно объединить в один – поиск ω(t). Если есть готовая школьная формула (как в прошлой задаче), то можно использовать её, если нет – найти ω(t) любыми методами (Ньютоновым формализмом, Лагранжевым – каким угодно). На этом этапе можно пренебречь медленным изменением параметром, считая частоту, энергию, амплитуду и т.д. константами.

Далее нужно сделать два шага:
Первый:связать E(t) и ω(t) с помощью уравнения ***E(t)/ω(t)=const,***
Второй: связать энергию с амплитудой.

Выполнять их можно в любом порядке, Степаньянц сначала делает второй (5), потом первый (6). Можно и наоборот, как делал я в первой задаче.

А заключительный седьмой – написание ответа.

Заключительная рекомендация ко всему решению подобных задач: обязательно пишите (t) у величин, которые от времени зависят.